MedienPädagogik
Zeitschrift für Theorie und Praxis der Medienbildung
www.medienpaed.com ISSN 1424-3636

Themenheft Nr. 47:
Immersives Lehren und Lernen mit Augmented und Virtual Reality – Teil 1.
Herausgegeben von Josef Buchner, Miriam Mulders, Andreas Dengel und Raphael Zender

Zur Bedeutung von Augmented Reality im Mathematikunterricht der Sekundarstufen

Eine mathematikdidaktische Diskussion an zentralen unterrichtsrelevanten Aspekten

Astrid Beckmann[1]

[1] Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd

Zusammenfassung
Für den Mathematikunterricht der Sekundarstufen fehlt bisher eine detaillierte Einordnung von Augmented Reality (AR) aus mathematikdidaktischer Sicht. Das vorliegende Paper möchte einen Beitrag dazu leisten, diese Lücke zu schliessen. Zentrale unterrichtsrelevante Aspekte wie ein angemessenes Bild von Mathematik einschliesslich Modellieren, Begriffserwerb und das offene Aufgabenformat sind Ausgangspunkt der Untersuchung. Im Ergebnis zeigt sich, dass räumliches Veranschaulichen und die Einbindung von digitalen Inhalten in interaktive Arbeitsblätter wichtige Möglichkeiten darstellen. Darüber hinaus gibt es Chancen, insbesondere beim Thema Modellieren, aber auch Grenzen von AR im Mathematikunterricht.

To the Significance of Augmented Reality in Secondary-Level Mathematics Teaching. A Discussion of Mathematics Didactics with References to Key Teaching-Related Aspects

Abstract
In terms of mathematics teaching at secondary level, there has yet to be a detailed assessment of augmented reality (AR) from the perspective of mathematics didactics. This paper seeks to redress the balance by taking key teaching-related aspects such as an appropriate image of mathematics including modelling, concept acquisition, and the open task format to be the starting point for its investigation. As a result, it notes either that spatial visualization and the integration of digital content into interactive worksheets represent important opportunities, but also that the possibilities extend into other areas of mathematics teaching like modelling teaching as well, and that there are limitations of AR.

Beckmann, Astrid. 2022. «Zur Bedeutung von Augmented Reality im Mathematikunterricht der Sekundarstufen. Eine mathematikdidaktische Diskussion an zentralen unterrichtsrelevanten Aspekten». *MedienPädagogik* 47 (AR/VR - Part 1): 53–75. https://doi.org/10.21240/mpaed/47/2022.04.03.X.

1. Zielsetzung des Beitrags

Augmented Reality (AR) gehört zu den digitalen Anwendungen, denen ein grosses Potenzial in Bezug auf das schulische Lernen zugeschrieben wird (Hütthaler 2020). Für den Mathematikunterricht wurden bereits zahlreiche AR-Projekte und AR-Erlebnisse entwickelt (z. B. www.geogebra.org), allerdings fehlen mathematikdidaktische Bewertungen und differenzierte Analysen dazu (Hütthaler 2020; Radianti et al. 2019; Reit 2020). Ebenso gibt es kaum Untersuchungen, die über den Bereich der Geometrie oder Analytischen Geometrie sowie die Möglichkeit des Triggerns (z. B. Abrufen von Inhalten in interaktiven Arbeitsblättern) hinausgehen und nach neuen Perspektiven des Mathematiklernens durch AR fragen. Der vorliegende Artikel möchte einen Beitrag dazu leisten, diese Lücke zu schliessen, indem an ausgewählten zentralen unterrichtsrelevanten Aspekten mögliche Potenziale und Grenzen von AR diskutiert werden. Die Diskussion kann im Rahmen dieses Artikels nur auf ausgewählte Aspekte und Beispiele eingehen und versteht sich daher zugleich auch als Impuls zu einer weitergehenden Diskussion und zu entsprechenden gezielten empirischen Untersuchungen.

2. Augmented Reality und schulischer Kontext

2.1 Begriffsfassung

Augmented Reality bedeutet *erweiterte Wirklichkeit*. AR verbindet die Realität mit der Virtualität. Es handelt sich um eine reale, physisch vorhandene Umgebung, in die virtuelle Objekte, also nicht physisch fassbare Objekte, integriert sind. Diese virtuellen Objekte können realen Objekten ähneln oder auch Fantasiegebilde sein. Zur Einordnung eignet sich das Virtualitätskontinuum, auch Reality-Virtuality-Continuum genannt, das Milgram und Kishino bereits Anfang der 1990er-Jahre entwickelten (vgl. z. B. Shapera 2016). Es erfasst alle möglichen Kombinationen von realer und virtueller Umgebung. AR ist eine dieser Möglichkeiten (Abbildung 1).

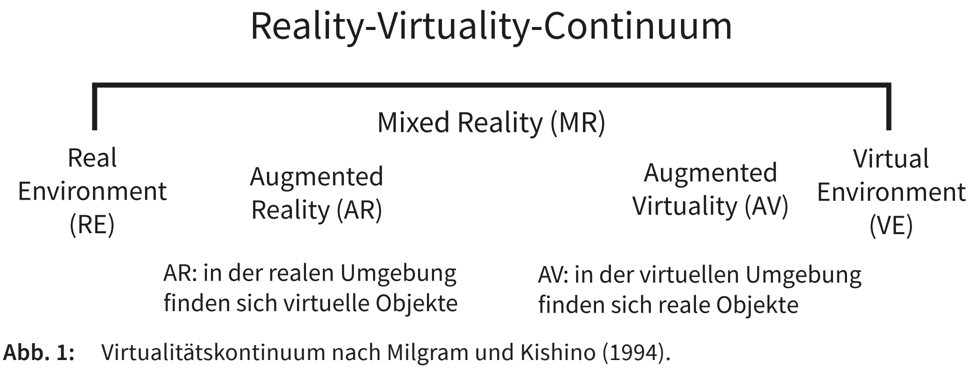


Abb. 1: Virtualitätskontinuum nach Milgram und Kishino (1994).

2.2 Augmented Reality im schulischen Kontext

AR hat zahlreiche Anwendungen in vielen ausserschulischen Bereichen, zum Beispiel Technik, Medizin und Wirtschaft, Militär, Bankwesen und Naturwissenschaften, aber auch in Kunst und Architektur (Carmigniani et al. 2011; Manuri und Sanna 2016). Zudem ist AR im Freizeit- und im Entertainmentbereich sehr beliebt (Fürst 2021; Schultz 2019). Aber auch für den schulischen Bereich wurden zahlreiche Anwendungen entwickelt, allerdings wird die tatsächliche Verbreitung im Unterricht der allgemeinbildenden Sekundarstufe noch als eher gering eingeschätzt (vgl. z. B. Hellriegel und Čubela 2018). AR bietet eine Vielfalt von Einsatzbereichen, die über herkömmliche Möglichkeiten hinausreichen (Kroker 2018). Dazu gehört die Integration von Fotos, 3D-Modellen, Audios und Videos, Messfunktionen und die Möglichkeit zu Verlinkungen zu Webseiten oder sozialen Medien oder das Hochladen von Texten (Schendera 2021). In Verbindung mit AR konnten bereits Lernzuwächse und Vorteile in Bezug auf Interaktion, Teamwork und Motivation festgestellt werden (Bacca et al. 2014). Allerdings wurde auch ein Effizienznachteil aufgrund von Verzögerungen im Arbeitsablauf durch die Beschäftigung mit der Technik beobachtet (ebd.). Weitere Studien wie die von Fehling (2019) im Berufsschulbereich und die von Buchner (2017) bestätigen die Zunahme von (intrinsischer) Motivation durch AR, aber auch eine starke Steigerung in der Wissensvermittlung. Eine Ursache dafür könnte sein, dass AR die Abstraktheit eines Lerngegenstands verringern kann, indem die Schüler:innen durch diese Technik auch komplexe Zusammenhänge direkt durch anschauliche Interaktion erfahren können (vgl. Maier 2017). Die Studie von Bacca et al. (2014) deutet darauf hin, dass sich AR besonders im Zusammenhang mit «abstrakten und komplexen Fachkonzepten» empfiehlt.

Der Einsatz von AR im Unterricht lässt sich durch verschiedene Apps oder webbasiert mit Tablet oder Smartphone umsetzen. Es gibt eine Vielzahl von zumeist kostenpflichtigen AR-Apps[1] mit unterschiedlichen Funktionen (Schendera 2021; Wolfinger et al. 2020). Sie ermöglichen das Erstellen eigener AR-Projekte, die dann über das Einscannen eines Triggers (Marker, Tracker, Target Image), der ein QR-Code, LOGO oder Foto sein kann, abgerufen werden können (Schendera 2021). Dieses Konzept liegt oft digitalen Schulbüchern oder interaktiven Arbeitsblättern zugrunde, die damit Themen und Aufgaben veranschaulichen oder durch Lernvideos und andere abrufbare Inhalte unterstützen. Weitere Apps ermöglichen spezielle geometrische Konstruktionen oder enthalten Messfunktionen (z. B. Trappmair und Hohenwarter 2020). Allerdings zeigt sich, dass der noch recht junge Markt dynamisch und durch die Kurzlebigkeit einiger AR-Anwendungen geprägt ist (Schendera 2021).

1 Beispiele für Apps im Anhang.

2.3 Augmented Reality und Mathematikunterricht

Auch für den Mathematikunterricht gibt es zahlreiche Entwicklungen, die die AR-Technologie nutzen. Schwerpunkte sind räumliche Veranschaulichungen, insbesondere in der Geometrie und der Analytischen Geometrie. Vorschläge beziehen sich auf Schnittmengen (Birnbaum und Ludwig 2018; Reit 2020), Netze von Körpern (Trappmair und Hohenwarter 2020; Schultheiß 2020; Wolfinger et al. 2020) oder auf die Einführung des dreidimensionalen Koordinatensystems (Schendera 2021) bzw. seine besondere Nutzung (Dilling 2022; Wolfinger et al. 2020). AR ermöglicht das Darstellen, interaktive Bewegen, Auseinanderfalten und Zusammensetzen der Körper in einer realen Umgebung, sodass die Schüler:innen das Problem und die dreidimensionalen Zusammenhänge besser erfassen können. Gelegentlich wird dem Einsatz von AR eine Wirkung im Hinblick auf die Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens (Kaufmann und Schmalstieg 2003; Birnbaum und Ludwig 2018; Reit 2020) oder zumindest einiger seiner Komponenten (Dünser 2005) zugeschrieben. Zudem wird AR auch im Mathematikunterricht für das unkomplizierte Aufrufen von Veranschaulichungen oder erklärenden Videos in individuellen Lernprozessen eingesetzt – zweifelsfrei ein besonderer Gewinn für heterogene Lerngruppen. Insgesamt fehlen jedoch empirische Untersuchungen und differenzierte Analysen, insbesondere zu den Chancen von AR im Mathematikunterricht, speziell für die Sekundarstufen (Radianti et al. 2019; Reit 2020). Im Folgenden werden an zentralen und übergreifenden Aspekten neue Perspektiven von AR für das Mathematiklernen eruiert.

3. Diskussion möglicher neuer Perspektiven von AR an ausgewählten zentralen und übergreifenden Aspekten des Mathematikunterrichts

3.1 Mathematik im Bildungskontext

Mathematikunterricht hat einen (allgemeinen) Bildungsauftrag, der als Teil des Gesamtbildungsauftrags von Schule gesehen werden muss und der über eine vielseitige mathematikspezifische Ausbildung erfüllt werden soll (Bruder et al. 2015). Um dieser Aufgabe gerecht zu werden, orientieren sich die Bildungsstandards (KMK 2012) mit ihren Leitideen bzw. fundamentalen Ideen (inhaltsbezogene Kompetenzen) und Leitmethoden (prozessbezogene Kompetenzen) an der Struktur der Mathematik als Wissenschaft, indem zugleich das Ziel verfolgt wird, ein angemessenes Bild von Mathematik zu vermitteln (Leuders 2005; Loos und Ziegler 2015; Neubrand 2015). In den zentralen frühen mathematikdidaktischen Arbeiten zu dieser Zielerreichung identifiziert Winter (z. B. 1996) drei unterrichtlich anzustrebende Grunderfahrungen, nämlich die Mathematik als *Geistesschulung* (Problemorientierung), die Mathematik als *Hilfe zum Verstehen von Alltag und Umwelt* (Anwendungsorientierung) und die Mathematik als *deduktives Gedankengebäude* (Strukturorientierung). Diese Grunderfahrungen finden sich im Wesentlichen auch heute in den Bildungsstandards wieder (KMK 2012; vgl. dazu auch Neubrand 2015). In den letzten Jahrzehnten hat sich das Bildungsziel «mathematical literacy» etabliert (zum Beispiel Jablonka 2003; Kaiser und Schwarz 2003; Lengnink 2005; Höfer und Beckmann 2009). In Zusammenfassung und Weiterentwicklung der zahlreichen Arbeiten zum Thema definiert Zell (2010) mathematical literacy über die folgenden drei Aspekte (ebd., 31f.): (a) Heuristische Denkweisen, die strukturiertes und plausibles Vorgehen ermöglichen und auf inner- und aussermathematische Kontexte anwendbar sind, (b) umfassendes Verständnis mathematischer Begriffe und Prozeduren in den Gebieten: Zahlen und arithmetische Operationen, funktionale Zusammenhänge, Flächen, Räume und Messung und Umgang mit Daten, (c) Vertrautheit in deduktiven Schlussfolgerungen. All diesen Ansätzen liegt der «Charakter» der Mathematik zugrunde, nämlich ihr Produkt- und ihr Prozesscharakter. Mathematik ist einerseits ein deduktives Gedankengebäude, also ein System aus Axiomen, Definitionen und logisch abgeleiteten Sätzen einschliesslich bekannter Anwendungen. Andererseits erweitert sich dieses System ständig, etwa indem neue Sätze hinzukommen, die aus Bekanntem logisch geschlossen/bewiesen werden. Dieser Prozess wird erreicht durch mathematische Methoden des Entdeckens, Problemlösens, Beweisens, Modellierens usw. Eine ergebnisoffene Diskussion zu neuen Perspektiven von AR im Mathematikunterricht kann nun einerseits direkt bei den Leitideen ansetzen, etwa der Bedeutung von AR in geometrischen oder stochastischen Kontexten oder den Leitmethoden. Andererseits kann direkt die Mathematik mit ihrem speziellen Charakter, den dazu gehörenden Grunderfahrungen bzw. die Aspekte von mathematical literacy Ausgangspunkt sein. Die vorliegende Analyse orientiert sich an beiden Möglichkeiten mit einer Konzentration auf typische mathematische Herangehens- bzw. Denkweisen, um so möglichst allgemein und ideenübergreifend Impulse für neue Ansätze zu AR anzustossen. Im Rahmen dieses Artikels kann dies nicht umfassend geschehen. Deshalb wird eine Auswahl getroffen und speziell auf die folgenden zentralen unterrichtsrelevanten Aspekte fokussiert (die jeweils kursiv gesetzten Punkte wurden als Gegenstand der folgenden Analyse ausgewählt):

– Mathematische Begriffe: Mathematik baut auf einer grossen eigenen Begrifflichkeit auf. Das dient der Exaktifizierung und erleichtert die Kommunikation und den Nachweis von Wahrheitsaussagen. *Begriffsbildung* ist somit auch ein bedeutender Prozess im Mathematikunterricht und durchzieht die gesamte Schulzeit (vgl. 3.2).
– *Dynamische und statische Sichtweise*: Mathematische Begriffsbildung ist ein komplexer Prozess, der sich speziell auf das Entwickeln von Grundvorstellungen richtet. Aus stoffdidaktischer Perspektive geht es bei der Grundvorstellung darum, dass Begriffen oder Verfahren normative Kategorien auf der Repräsentationsebene zugeschrieben werden können (vom Hofe 1995). Beispielsweise enthält der

Bruchzahlbegriff die Grundvorstellung des Anteils oder des Operators, der Ableitungsbegriff enthält die Grundvorstellung der Änderung oder des Approximierens und der Funktionsbegriff die Vorstellung bzw. den Aspekt[2] der Zuordnung oder der Änderung bzw. Kovariation (vgl. dazu auch 3.2). Speziell stehen sich zwei Sichtweisen gegenüber, die statische und die dynamische (vgl. 3.3).
- Mathematisches Denken: Mathematik zeichnet sich durch ein eigenes Denken bzw. eine eigene *Ästhetik* aus. Dazu gehört zum Beispiel der Blick auf Regelmässigkeiten wie Symmetrien oder Goldene Schnitte, aber auch eine elegante logisch lückenlose Beweisführung (vgl. 3.4).
- Funktionalität der Mathematik: Mathematik dient in vielen Zusammenhängen als Werkzeug, hat also eine grosse Funktionalität. Sie stellt Algorithmen bzw. Lösungsverfahren zur Verfügung, die bei Problemlösungen entlasten und damit Entwicklungen fördern und Innovationen schaffen können. Ein bekanntes schulisches Beispiel ist die PQ-Formel zur Lösung quadratischer Gleichungen. Damit hat Mathematik eine grosse Bedeutung, wenn es um das Lösen von Anwendungsproblemen bzw. Problemen mit realen Kontexten geht. Der Lösungsansatz ist hier die Mathematisierung, also die Beschreibung des Problems mit mathematischen Mitteln. Mathematisierung ist ein wichtiger Teil im Modellierungskreislauf (Abbildung 5). Aus der Funktionalität der Mathematik und dem Bildungsauftrag, eine geeignete Verbindung zwischen Mathematik und Realität herzustellen, ergibt sich die Bedeutung des *Modellierens* im Mathematikunterricht (vgl. 3.5).
- Zu einem angemessenen Bild von Mathematik gehört das Erfahren typisch mathematischer Tätigkeiten. Modellieren und Begriffsbildung gehören genauso wie Problemlösen und die Möglichkeit des Selbstentdeckens von Lösungswegen zu einem zeitgemässen Mathematikunterricht. Gerade im Zusammenhang mit dem Problemlösen hat sich das *offene Aufgabenformat* bewährt (vgl. 3.6).

3.2 AR zur Förderung des mathematischen Begriffserwerbs

Begriffsbildung ist eine der zentralen Methoden der Mathematik. Im Unterschied zum Fremdsprachenunterricht geht es dabei nicht nur um das Lernen der Bezeichnungen, sondern auch um ein inhaltliches Verstehen. Zum Verstehen des Begriffs gehören Vorstellungen über den Begriffsinhalt, den Begriffsumfang und das Begriffsnetz. Mathematikunterricht muss den Begriffsbildungsprozess unterstützen, der auch über verschiedene Lernphasen erfolgt. Zunächst wird der Begriff als Phänomen und über wichtige Beispiele erfahren, dann als Träger bestimmter Eigenschaften und später durch Einordnung in ein Begriffsnetz (vgl. zum Thema z. B. Übersicht in Weigand 2015). Im Folgenden wird an zwei Beispielen die mögliche Bedeutung von AR für den Begriffserwerb auf den ersten Stufen diskutiert.

2 Gelegentlich wird im Zusammenhang von Grundvorstellungen auch von «Aspekt» gesprochen. Aspekte sind Interpretationen von Grundvorstellungen.

3.2.1 AR und der Volumenbegriff

Der Volumenbegriff ist ein zentraler Begriff unseres dreidimensionalen Anschauungsraums. In der Primarstufe wird er als Phänomen erworben, sodass in der Sekundarstufe die Verfahren zur Volumenberechnung erarbeitet werden können, die auf den Eigenschaften der Körper beruhen. Das übliche Vorgehen, die Körper dazu aus Einheitswürfeln zu konstruieren, versagt bei komplexeren Körpern wie etwa der Pyramide. Hier greift die Strategie der Zurückführung auf bekannte Körper. Bei einem handlungsorientierten Ansatz wird zum Beispiel eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche mit Wasser befüllt und festgestellt, dass ein Würfel mit identischer Grundfläche und doppelter Höhe sechsmal so viel Wasser fasst. Oder man erkennt durch Probieren, dass sechs solche Pyramiden in den Würfel passen (Fürst 2021). Das Verfahren ist bewährt, benötigt für die handlungsorientierte Gruppenarbeit in der normalen Klasse aber über 30 Pyramiden. In einem möglichen Lernszenario mit AR wird nur eine Pyramide benötigt, die Anlass zu der offenen Frage nach der Volumenberechnung sein kann. AR bietet dabei die Möglichkeit, durch unterschiedliche vorbereitete Dateien den Erkenntnisprozess in heterogenen Lerngruppen individuell zu unterstützen. So können die Schüler:innen offen an das Problem herangehen, die physische Pyramide über die Kamera mit der AR-App erfassen, virtuell vervielfältigen oder zerteilen, unterschiedlich zusammensetzen und/oder durch virtuelle bereits bekannte Körper umhüllen (Abbildung 2). Andererseits kann die Lehrkraft verschiedene Dateien vorbereiten oder bereits entwickelte Dateien nutzen, die während des Lernprozesses aufgerufen werden können. Im Beispiel kann dies eine einzelne Pyramide sein, die als idealisiertes Modell der realen Pyramide dienen kann, oder auch ein mit Pyramiden gefüllter Würfel, der auseinander geklappt werden kann und somit raumanschauliche Zusammenhänge erfahrbar macht (Abbildung 2, vgl. auch Fürst 2021). Ausserdem ermöglicht AR, sehr schnell und unkompliziert virtuelle Pyramiden mit unterschiedlichen Massen zu erstellen, etwa als Vertiefung des Themas, indem je nach AR-App auch eigene Berechnungen mit den Ergebnissen der App verglichen werden können. Der Lernprozess wird durch Kollaboration und Kommunikation unterstützt, aber auch durch einen Wechsel der Repräsentationsformen, indem aus den raumanschaulichen Erkenntnissen Gleichungen für die Volumenberechnung der Pyramide erarbeitet werden können.

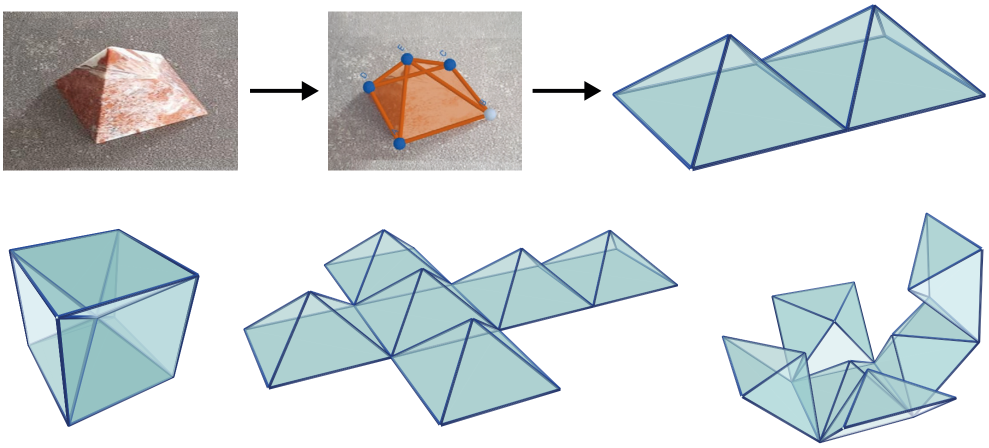
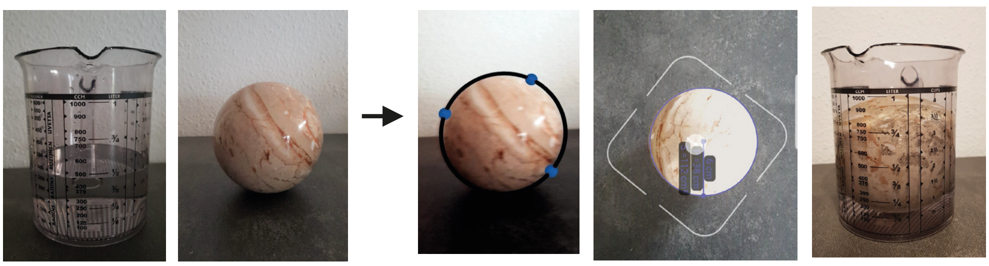


Abb. 2: Entdeckendes Lernen zum Pyramidenvolumen mit AR (erstellt mit GeoGebra 3D Rechner, Datei «Würfel-6Pyramiden» von Georg Wengler, https://www.geogebra.org/search/UTqjJ4bx).

3.2.2 AR und der Funktionsbegriffserwerb

Der Funktionsbegriff ist einer der wichtigsten, aber auch komplexesten mathematischen Begriffe. Sein Erwerb ist ein Prozess, der sich über die gesamte Schulzeit erstreckt. Dieser kann nur gelingen, wenn zunächst geeignete Grundvorstellungen entwickelt werden. Dazu gehören die inhaltlichen Vorstellungen *Zuordnungsaspekt* (Korrespondenz, Aktionsebene), *Änderungsaspekt* (Kovariation, Prozessebene) und *Objektaspekt* (Objektebene) in verschiedenen Repräsentationen (Höfer 2008). Die gesamte Komplexität des Funktionsbegriffs ist im «Haus des funktionalen Denkens» von Höfer (2008) erfasst, wobei sich zeigt, dass die jeweils höhere Ebene erst nach einer erfolgreichen Grundlegung der niedrigeren Ebenen (Aktionsebene und dann Prozessebene) erreicht werden kann. Mathematikunterricht sollte sich also (zunächst) auf die Sicherung des Zuordnungsaspekts und darauf aufbauend auf die Sicherung des Änderungsaspekts in all seinen Darstellungsformen und Wechseln dazwischen konzentrieren. Wie wichtig eine systematische und umfassende Behandlung des Themas ist, haben verschiedene Untersuchungen insbesondere zur Jahrtausendwende nachgewiesen, wonach viele Schüler:innen ein eingeschränktes und wenig inhaltliches Begriffsverständnis hatten (z. B. Vinner und Dreyfus 1989; Adams 1997; Gómez und Carulla 2001). Innerhalb des oben erwähnten EU-Projekts wurde die Stärke realer naturwissenschaftlicher Experimente für den Funktionsbegriffserwerb gezeigt (Beckmann et al. 2010). Dies bestätigen auch andere Untersuchungen (Ganter 2013; Lichti und Roth 2018; Lichti 2019). Ein Vorteil für den Erwerb des Änderungsaspekts kann sich durch digitale Medien wie dynamische Geometriesysteme ergeben (Digel und Roth 2020), aber auch durch den Einsatz von AR-Technologien, wie neue Studien zeigen (Levy et al. 2020; Swidan et al. 2020). Es fragt sich, ob AR auch ein besonderes Potenzial für die Grundvorstellung der Zuordnung hat. AR kann jedes mathematische Thema auf einer Hyperebene erweitern, indem es Audios, Videos bzw. 3D-Animationen abrufbar bereitstellen kann. Denkbar sind hier Videos realer Experimente (Roth 2014). Dass diese die beim selbstständigen realen Experimentieren beobachteten positiven Ergebnisse (Beckmann 2010) übertreffen, wurde allerdings noch nicht bestätigt. Hier ist auch die Studie von Rolfes (2014) beachtenswert, wonach Animationen und dynamische Repräsentationen nur dann lernwirksam sind, wenn sie kognitiv stimulieren.

Aus mathematikdidaktischer Sicht interessiert auch mehr, ob AR den konkreten Lernprozess unterstützen kann. Dies soll an einem Beispiel diskutiert werden: Ein einfaches Experiment, bei dem der Zuordnungsaspekt in einem kubischen Zusammenhang direkt beim Experimentieren authentisch erfahren werden kann, ist das Eintauchen von Kugeln unterschiedlicher Radien in einen mit Wasser gefüllten Krug. Beim Eintauchen verdrängt jede Kugel ein bestimmtes Wasservolumen. Die jeweilige Zuordnung zwischen Radius und verdrängtem Volumen wird beobachtet. Üblicherweise erfolgt die Messung der Kugelradien mit einem Messschieber; alternativ könnte dies zum Beispiel auch mit AR erfolgen (Abbildung 3). Die rein digitale Arbeit könnte hier eventuell die übersichtliche Dokumentation der Messung und Messergebnisse am Bildschirm motivieren, was wiederum Begründungs-, Reflexions- und Mathematisierungsprozesse begünstigen kann. Dieser Vorteil wäre allerdings empirisch zu untersuchen. Die Analyse legt eher nahe, dass die besondere Stärke von AR sich hier weniger auf den Zuordnungsaspekt als darauf bezieht, dass AR das bewusste Durchlaufen des Modellierungskreislaufs anregt, speziell in den Phasen der Idealisierung und der Validierung und Reflexion (vgl. dazu genauere Ausführungen in 3.4). Zudem können sich eventuell auch besondere Chancen für heterogene Lerngruppen ergeben, indem Lernprozesse durch digitale, nicht-digitale und hybride Lernszenarien individualisiert werden können.



Versuchsaufbau → Übergang zum idealisierten Modell bzw. zur Messung/Versuchsdurchführung

Abb. 3: Virtuelle Erweiterung des realen Experiments mit AR: Verweilen beim idealisierten Modell.

3.3 AR und die dynamische und statische Sichtweise

Die besonderen Chancen und möglichen neuen Perspektiven durch den Einsatz der AR-Technologie sollen hier nun an zwei weiteren zentralen mathematischen Begriffen bzw. Verfahren diskutiert werden:

3.3.1 AR und Kongruenzabbildungen

Kongruenzabbildungen spielen in vielen Begründungszusammenhängen der Sekundarstufen eine Rolle. Zum Beispiel besteht beim Beweis des Basiswinkelsatzes im gleichschenkligen Dreieck die wesentliche Argumentation darin, die beiden Basiswinkel an der Mittelsenkrechten der Basis zu spiegeln und aufgrund der Winkelmasstreue der Geradenspiegelung auf deren Kongruenz zu schliessen. Mit Beweisanfänger:innen kann dies über die konkrete Handlung des Aufeinanderklappens an einem Papierdreieck erarbeitet werden. Die Kongruenzabbildungen erscheinen hierbei in dynamischer Sichtweise. Auf einer höheren Beweisstufe (vgl. Beckmann 1997) wird zu einer statischen Sichtweise übergegangen, indem die Konstruktionsvorschrift der Abbildung, speziell der Vergleich von Streckenlängen und Winkelgrössen, im Vordergrund steht. AR kann beide Sichtweisen unterstützen. Für die dynamische Sichtweise können die Schüler:innen vorgegebene gleichschenklige Dreiecke oder das eigene Geodreieck mit AR untersuchen, also einscannen, abbilden, in zwei kongruente Dreiecke zerlegen und aufeinanderlegen (Abbildung 4). Für die statische Sichtweise bietet sich zum Beispiel eine Untersuchung der Umgebung mit AR an, indem zu jeweils zwei Punkten im Raum (Urbild und Bild) die Lage der möglichen Spiegelgeraden bzw. Symmetrieachse identifiziert werden soll. Hier spielen Streckenlängen und Winkelmasse eine Rolle.

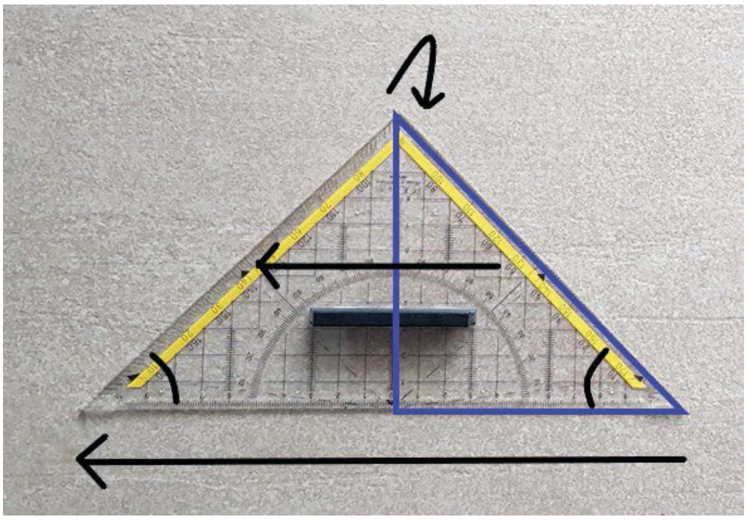


Abb. 4: Erweiterte Realität des Geodreiecks: Entwicklung einer möglichen Beweisidee zum Basiswinkelsatz.

3.3.2 AR und Grenzwertbegriff

Ein Paradebeispiel für einen mathematischen Begriff, der sowohl die dynamische als auch die statische Sichtweise zum Verständnis nutzt, ist der Grenzwertbegriff, zum Beispiel der Grenzwert einer reellen Zahlenfolge: In dynamischer Sichtweise «bewegen» wir uns entlang der Folgenglieder, die sich «mit der Zeit» immer mehr einem bestimmten Wert annähern, dem sogenannten Grenzwert. In statischer Sichtweise betrachten wir eine ε-Umgebung um den Grenzwert herum und stellen fest, dass ab einem bestimmten Index «fast alle» Folgenglieder in dieser ε-Umgebung liegen. Dabei können wir ε beliebig klein wählen. Diese Beschreibungen sind in der gewählten Form natürlich keine exakten mathematischen Definitionen, sie erfassen aber die wesentlichen Aspekte der dynamischen und statischen Sichtweise der Definition und zeigen zudem auf, dass beide Vorstellungen durch Animationen anschaulich simuliert werden können. Die Lehrkraft könnte diese in ein interaktives Arbeitsblatt integrieren. Für den dynamischen Fall könnte sich ein kleiner Film anbieten, für den statischen Fall eine Interaktionsmöglichkeit, die den Schüler:innen gestattet, verschiedene immer kleiner werdende Umgebungen um den Grenzwert abzugreifen, zu vergrössern und festzustellen, dass sich die «Inhalte» ab einem bestimmten Index nicht unterscheiden. Diese Möglichkeiten sind interessant, könnten aber auch ohne AR-Technologie (Trigger) bereitgestellt werden.

3.4 AR und Ästhetik/mathematisches Denken

Lange Zeit prägte der Produktcharakter den Mathematikunterricht (vgl. 3.1). Beweise wurden als Fertigprodukte präsentiert und keiner fragte nach dem Weg dahin. Wagenschein (1982, 107) sah darin ein „didaktisches Verhängnis", denn der Lösung eines mathematischen Problems geht stets ein Wechsel zwischen Suchen und Finden bzw. Induktion und Deduktion voraus (Pickert 1989). Mathematik hat also auch eine persönliche und damit auch eine ästhetische Komponente. Poincaré hielt das Ästhetische sogar eher als das Logische für das dominierende Element der mathematischen Kreativität (Davis und Hersh 1994). Definitionsversuche beschreiben die mathematische Ästhetik als Wechsel von Anspannung und Entspannung, Verwirklichung von Erwartungen; Überraschung bei der Wahrnehmung von unerwarteten Beziehungen, von Einheitlichkeit; ein sinnliches, optisches Vergnügen; Freude an der Gegenüberstellung des Einfachen und des Komplexen, der Freiheit und des Zwangs; … Harmonie, Ausgewogenheit, Kontrast usw. (nach Davis und Hersh 1994). In anderen Arbeiten wird der Zusammenhang zwischen Mathematik und Ästhetik über das ästhetische Empfinden bei bestimmten Ziffern, Gleichungen, Sätzen und Beweisen hergestellt oder wenn Mathematik zur Beschreibung von künstlerischen Werken aus Musik, Kunst und Architektur eingesetzt wird (zum Beispiel Sinclair und Berneche 2010; Beckmann 2003). Ein Mathematikunterricht, der die Beziehung zwischen

Mathematik und Ästhetik berücksichtigt, trägt zu einem angemessenen Bild von Mathematik bei und kann somit zu einer realistischen Einstellung zur Mathematik und einer adäquaten Weltsicht führen (Graumann 1997).

Unterrichtsbeispiele mit AR zur Förderung der einen Seite der mathematischen Ästhetik finden sich schnell: So können Schüler:innen mit ihrem Smartphone die Umgebung erkunden und zum Beispiel Symmetrien, Goldene Schnitte und andere Regelmässigkeiten bei Körpern und ihren Netzen mithilfe der Veranschaulichung mit AR entdecken und authentisch erfahren. AR erscheint aber auch zur Förderung der anderen Seite der Ästhetik im Sinne des mathematischen Denkens als Suchen und Finden (eleganter) logisch lückenloser Schlüsse förderlich: AR kann den Beweisfindungsprozess unterstützen und verlangsamen, indem bestimmte heuristische Strategien wie das Einzeichnen von Hilfslinien oder das Entdecken von Teilfiguren angeregt werden können (vgl. 3.3). Neben der eigenen freien Erkundung der Objekte können zusätzlich an den Figurenteilen auch Links zu Tipps oder zu mathematischen Sätzen gesetzt werden, die im Beweisfindungsprozess hilfreich sein können. Eher entscheidend für das Beweisenlernen ist aber die geeignete Auswahl von Sätzen und deren unterrichtliche Einbettung derart, dass sie das Beweisbedürfnis wecken und das Leistungsniveau der Schüler:innen treffen (Beckmann 1997). Hier gibt es positive Erfahrungen mit dynamischen Geometriesystemen (Werth 2014); ob AR genauso hilfreich sein kann, bedarf weiterer Untersuchungen.

3.5 AR und Modellieren

Modellieren ist eine der zentralen Tätigkeiten der Mathematik und damit eine der wichtigsten Leitmethoden im Mathematikunterricht. Beim Modellieren werden angewandte Probleme oder Situationen mithilfe mathematischer Begriffe und Verfahren gelöst oder beschrieben. Anwendungen betreffen praxisrelevante Fragestellungen und Entwicklungen sowie gesellschaftliche und globale Herausforderungen und können dabei auch Phänomene aus der Umgebung der Schüler:innen sein. Typische und schulisch relevante Mathematisierungsmittel sind Variablen, Terme, Gleichungen und Funktionen, aber auch grafische Darstellungen, Verfahren der Analysis usw. Modellierungsaktivitäten im Mathematikunterricht können somit einen wichtigen Beitrag leisten, um die Funktionalität der Mathematik aufzuzeigen. In der Forschungsliteratur wird das mathematische Modellieren als Kreislauf beschrieben, wobei sich die Phasen des Prozesses je nach Perspektive und Schwerpunkten etwas unterscheiden können (Borromeo Ferri 2006; Wess et al. 2021). Der vorliegende Artikel bezieht sich auf den in Abbildung 5 dargestellten einfachen Modellierungskreislauf, der sich in leicht erweiterter und gedrehter Darstellung grob am Vorschlag von Blum (1985) orientiert. Der zyklische Prozess des Modellierens besteht aus verschiedenen Phasen, die den Schüler:innen jeweils bestimmte Kompetenzen abverlangen

(Wess et al. 2021): Zunächst geht es um das Verstehen des realen Problems, das im nächsten Schritt durch Separieren von irrelevanten Variablen vereinfacht und also zu einem idealisierten Modell der Realität, zum Realmodell wird. Mathematisierung führt zum mathematischen Modell, in welchem die Lösung sodann mathematisch erarbeitet wird. Die Ergebnisse werden anschliessend in Bezug auf das Ausgangsproblem interpretiert, reflektiert und validiert. Eventuell wird eine Modifizierung des Modells erforderlich und der Kreislauf beginnt erneut. Modelle dienen der Beschreibung, Erklärung oder Vorhersage. Beispiele sind Klimamodelle, Modelle zur Wirtschafts- oder Pandemieentwicklung, physikalische, aber auch juristische Gesetze, Codes und vieles mehr. Ein kritisches Verständnis für Modelle, Modellbildung und ihre Grenzen kann sensibilisieren und ist Basis für Bildung und Mündigkeit in unserer Gesellschaft. Verschiedene Studien zeigen, dass Schüler:innen in allen Phasen des Modellierungskreislaufs Probleme haben können (z. B. Maaß 2004; Blum 2015; Plath und Leiss 2018; Wess et al. 2021). In der mathematikdidaktischen Diskussion werden daher die Rolle der Lehrperson und geeignete Interventionen diskutiert (vgl. Wess et al. 2021). Greefrath (2011) sieht eine förderliche Chance darin, in den unterschiedlichen Phasen im Kreislauf verschiedene Technologien einzusetzen: Danach könnten Simulationen helfen, das mathematische Modell zu prüfen, ebenso wie die Phase der Interpretation und Validierung. Konkret können Dynamische Geometriesysteme die Mathematisierung und Computer-Algebrasysteme das mathematische Arbeiten unterstützen und Visualisierungen den Übergang vom Realmodell zum mathematischen Modell (vgl. auch Greefrath et al. 2018 und Kaiser et al. 2015).

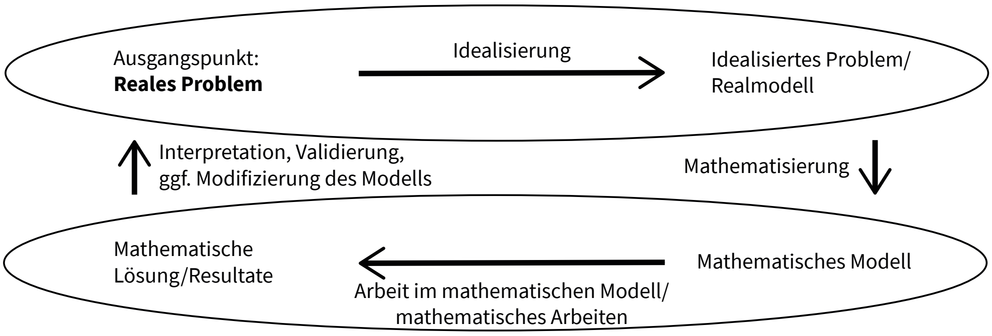


Abb. 5: Modellierungskreislauf.

3.5.1 AR im Modellierungskreislauf

Es deutet vieles darauf hin, dass AR eine besondere Perspektive für das Thema eröffnet, denn die Realitätserweiterung mittels einer AR-App ist für sich ein Modell und zumeist ein idealisiertes Modell der Realität, da eine Konzentration auf wesentliche Variablen und Eigenschaften des realen Objekts erfolgt. Diese Überlegung unterstützt auch den oben kurz beschriebenen Ansatz von Greefrath, in dieser Phase digitale Tools für Visualisierungen zu nutzen, was er zudem auch in der Phase der Validierung als Möglichkeit sieht. Dies soll im Folgenden am Beispiel des Dosenproblems diskutiert werden, auch als Anstoss für empirische Studien: Beim *Dosenproblem* geht es um die Frage einer optimalen zylindrischen Dosenform mit vorgegebenem Volumen, bei der das (voll umhüllende) Umwickelpapier minimiert werden soll (um so der Herstellungsfirma Kosten zu sparen). Das Dosenproblem kann offen über den Impuls einer realen Dose und unter Hinweis auf eine AR-App gestellt werden. Schüler:innen haben gelegentlich Schwierigkeiten, das reale Problem geeignet einzuordnen, woraus zu starke Vereinfachungen oder nicht passende Annahmen im Hinblick auf das Realproblem entstehen (Maaß 2004; Blum 2015). Die Nutzung einer AR-App visualisiert den Übergang von der Dose (Realität) zum idealisierten Modell direkt während der Anwendung und unter paralleler Sichtbarkeit von realer Dose und dem Zylinder-Modell (Abbildung 6). Gleichzeitig bietet dies auch die besondere Gelegenheit, beim idealisierten Modell zu verweilen, sich mit den relevanten Grössen auseinanderzusetzen und Unterschiede zum realen Modell zu diskutieren. Die Visualisierung des Realmodells kann zudem den Übergang zum mathematischen Modell erleichtern und bereits erste Lösungsideen anschaulich unterstützen, indem hier im Beispiel der Zylinder direkt abgewickelt werden kann (soweit in der App oder als Datei hinterlegt, Abbildung 6b). AR unterstützt damit die auch schon bei Greefrath (2011) angesprochene Möglichkeit des Experimentierens (hier mit dem «Umwickelpapier»). Der Modellierungskreislauf wird also mithilfe von AR langsamer und bewusster durchlaufen. AR bietet hier – im Unterschied zu einem Video – die Möglichkeit, ohne Unterbrechung (ohne Wechsel des Mediums) vom eigens erfassten Realmodell zum Experimentieren zu gelangen. Für nicht so leistungsstarke Schüler:innen kann die Abwicklung hilfreich sein, da sie auf die hier wesentliche Grösse des Oberflächeninhalts der Dose führt. AR-Apps mit Messfunktion gestatten zusätzliche Messungen und können gleichzeitig eine mathematische Prüfung anregen. Die Arbeit im mathematischen Modell erfordert Mittel der Analysis und erfolgt unabhängig von AR. Sie stellt einen Bezug zum Volumen her und führt auf das Ergebnis, dass bei der «optimalen» Dose Höhe und Durchmesser gleich sind. In der abschliessenden Phase geht es um die Validierung, Interpretation und Reflexion, die Schüler:innen oft vor grosse Herausforderungen stellt, da häufig ein Verständnis für Validierung fehlt (Galbraith und Stillmann 2006). Hier kann AR möglicherweise unterstützen, indem mit der AR App (unterschiedliche) Dosen modelliert werden, die dem Optimierungsergebnis entsprechen. Es fällt ein Unterschied zu handelsüblichen Dosen auf. Die anschauliche Darstellung bzw. Visualisierung nach Greefrath (2011) motiviert damit eine fächerübergreifende Diskussion, die auch ästhetische Fragen und Marketingaspekte einbezieht.

Abb. 6: (a) Idealisiertes Modell mit AR und (b) Abwicklung des Umwickelpapiers (erstellt mit GeoGebra 3D Rechner, Datei «Abrollen des Netzes eines Zylinders» von Birgit Lachner, https://www.geogebra.org/search/Zjr38uff).

3.5.2 AR in einem Unterrichtsbeispiel zum Modellieren

In dem von der Autorin koordinierten EU-Projekt *ScienceMath*, dessen grundlegendes Ziel die Entwicklung und Erprobung von Unterrichtsmodulen zur Förderung von Mathematical Literacy war, lag ein besonderer Fokus auch auf dem Modellieren (Beckmann 2010; Beckmann und The ScienceMath-Group 2010; Michelsen 2015). Am Beispiel «Vaekst/Wachstum», eines von den dänischen Projektpartnern entwickelten Unterrichtsmoduls, soll nun diskutiert werden, ob AR einen spezifischen Beitrag zum Erwerb der Modellierungskompetenzen in den verschiedenen Phasen leisten kann (vgl. www.sciencemath.ph-gmuend.de). In diesem Unterrichtsmodul geht es um das Thema Modellieren, wobei der Schwerpunkt auf den Mathematisierungsmitteln, einer ständigen kritischen Reflexion und Begründung des jeweils geeignetsten Mittels liegt. Die Aufgabenteile betreffen grafische Darstellungen, Wechsel zwischen Graphen und beschreibenden Situationen, symbolische Darstellungen bzw. Gleichungen als Modellierungsmittel, Tabellen mit inhaltlicher Befassung und Modellierung. Dabei werden auch Verfahren zu einer Beurteilung und Entwicklung von Modellen erfragt und die Nutzung ausgewählter Modelle für Voraussagen angeregt. Eine Bedeutung von AR erschliesst sich hier nicht sofort, wie auch beim Abschnitt «AR und der Modellierungskreislauf» die Phase der Mathematisierung und das Arbeiten im mathematischen Modell ohne AR erfolgt. Es spricht auch vieles dafür, dass eine von AR unabhängige Tätigkeit des Mathematisierens ein angemessenes Bild von Mathematik fördert und dass sich für diese Phase im Modellierungskreislauf aufgrund der typischen Mathematisierungsmittel eher digitale Medien wie Computer-Algebra-Systeme oder Tabellenkalkulation anbieten (vgl. Kaiser et al. 2015). AR kann aber dennoch interessant sein, indem die einzelnen Aufgabenteile über QR-Codes bzw. Images individuell aufgerufen und durch Audio, Video-Dateien bzw. 3D-Animationen unterstützt werden können, die eine gleichzeitige Betrachtung von Anwendung und ihrer Mathematisierung gestatten. Schüler:innen erhalten auf diese Weise weitere Impulse und Rückmeldungen und können notfalls ihre Modelle korrigieren.

3.6 AR und das offene Aufgabenformat

AR wird gelegentlich ein Vorteil in Bezug auf offene Unterrichtssituationen zugeschrieben (Buchner 2017). Im Mathematikunterricht hat sich insbesondere das Format der offenen Aufgaben bewährt, da offene Aufgaben unterschiedliche Zugänge und Lösungswege zulassen und somit das entdeckende Lernen und das Problemlösen auf individuellen Wegen ermöglichen (vgl. dazu Übersicht zum Thema Aufgaben in Leuders 2015). Offene Aufgaben bilden aus mathematikdidaktischer Sicht ein einfaches, aber starkes Format, um selbstgesteuertes zukunftsorientiertes Lernen in heterogenen Lerngruppen zu fördern. Leistungsstarken Schüler:innen genügt die offene Aufgabenstellung, um eigene Lösungswege und Lösungen zu finden, für nicht so leistungsstarke stehen gestufte Tipps zur Verfügung, um so Impulse für eigene Wege zu bekommen. AR unterstützt auch das offene Aufgabenformat, indem die «Tipps» in verschiedenen Formaten (Audio, Fotos, Videos usw.) in die Arbeitsumgebung (Arbeitsblatt, Klassenraum) so eingebunden werden können, dass sie durch Trigger individuell abrufbar sind. Hierbei kann die Lehrkraft sogar steuern, zu welchen Zeitpunkten welche Zusatzinformationen abrufbar sind und wann nicht. Welche Tipps zur Verfügung gestellt werden, hängt natürlich vom Lerngegenstand und von der Lerngruppe ab. Hinweise dazu ergeben sich aus der Analyse in den anderen Abschnitten dieses Papers.

4. Zusammenfassendes Fazit und Anregungen für weitere Forschung

Für den Mathematikunterricht der Sekundarstufen fehlt bisher eine detaillierte Einordnung von Augmented Reality aus mathematikdidaktischer Sicht. Der vorliegende Artikel möchte einen Beitrag dazu leisten, diese Lücke zu schliessen, indem zentrale unterrichtsrelevante und übergreifende Aspekte wie Begriffsbildung, dynamische und statische Sichtweise, Modellieren und Ästhetik sowie das offene Aufgabenformat Ausgangspunkt der Diskussion sind. Sie lassen sich aus dem Auftrag ableiten, ein angemessenes Bild von Mathematik zu vermitteln.

Die bisher wenigen Arbeiten, die sich aus wissenschaftlicher Sicht mit AR im Mathematikunterricht der Sekundarstufe befassen, beziehen sich vorwiegend auf die Geometrie, insbesondere die Analytische Geometrie, und heben hier speziell die Möglichkeit der Veranschaulichung hervor. Die häufig formulierte Chance von AR zur Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens muss noch weiter untersucht werden. Die Bedeutung von AR im Zusammenhang mit interaktiven Lehrbüchern, Arbeitsblättern oder Padlet-Lernumgebungen, bei denen durch Tracken/Triggern digitale Inhalte wie Fotos, Videos, 3D-Modelle und Audios unkompliziert, selbstbestimmt und individuell abgerufen und in den Lernprozess eingebunden werden können, zeigt sich auch in der vorliegenden mathematikdidaktischen Bewertung. Diese führt aber darüber hinaus auf neue Perspektiven von AR im Mathematikunterricht, aber auch auf Grenzen.

Speziell wird eine besondere Stärke von AR beim Thema Modellieren gesehen. AR kann die Schüler:innen in einzelnen Phasen des Modellierungsprozesses unterstützen. Insbesondere kann sie den Übergang vom realen Objekt zum idealisierten Modell visualisieren und dadurch verlangsamen und die abschliessende Validierungsphase und Reflexion fördern. Sie kann den ersten Schritt zum mathematischen Modell anregen, hat in der Arbeit im mathematischen Modell jedoch klare Grenzen und würde hier auch der Vermittlung eines angemessenen Bilds von Mathematik eher entgegenstehen.

Beim Begriffserwerb hängt die Entscheidung für den Einsatz der AR-Technologie vom Begriff und der anzustrebenden Grundvorstellung ab. AR kann sowohl die dynamische als auch die statische Sichtweise fördern. Die in manchen Arbeiten erwähnte besondere Bedeutung von AR für abstrakte Fachkonzepte muss allerdings stets im Einzelfall geprüft werden. Die vorliegende Analyse sieht gerade beim Erwerb abstrakter und komplexer mathematischer Begriffe Grenzen oder Alternativen. Dies wurde am Grenzwertbegriff und am Zuordnungsaspekt des Funktionsbegriffs diskutiert. In der Anfangsphase des Funktionsbegriffserwerbs scheint AR eher die Modellierungskompetenz zu fördern.

Darüber hinaus werden eventuell Chancen von AR bei Beweisfindungsprozessen gesehen. Allerdings fragt sich, ob AR die Vorteile von dynamischen Geometriesystemen wirklich erreicht; hier wären weitere Untersuchungen nötig. Insgesamt verspricht AR, die ästhetische und die funktionale Seite der Mathematik vielfältig und über entdeckendes Lernen durch die simultane Erweiterung und Idealisierung der realen Umgebung und in fächerübergreifenden Zusammenhängen ohne Wechsel des Mediums verdeutlichen zu können. Hervorzuheben ist, dass vieles dafür spricht, dass AR individuelle Lernprozesse in heterogenen Lerngruppen und die Kommunikation und Kollaboration fördern kann, auch indem sie das offene Aufgabenformat im Mathematikunterricht vielfältig unterstützt. Als Fazit eröffnen die Überlegungen in der hier vorgestellten Diskussion neue Chancen von AR für mathematische Kontexte auch neben der Geometrie. Es wäre wünschenswert, dass die Ergebnisse ein Anstoss zu weiteren Analysen und empirischen Untersuchungen sein könnten.

Literatur

Adams, Thomasenia. 1997. «Adressing students' difficulties with the concept of function: applying graphic calculators and a model of conceptual change». *Focus Learn Probl. Math* 19 (2): 43-57.

Bacca, Jorge, Silvia Baldiris, Ramon Fabregat, Sabine Graf, und M. Kinshuk. 2014. «Augmented Reality Trends in Education: A Systematic Review of Research and Applications». *Educ. Technology & Sciences* 17 (4): 133-49. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.10.015.

Beckmann, Astrid. 2003. *Fächerübergreifender Mathematikunterricht: Teil 1: Ein Modell, Ziele und fachspezifische Diskussion, Teil 2: Mathematikunterricht in Kooperation mit dem Fach Physik, Teil 3: Mathematikunterricht in Kooperation mit dem Fach Deutsch, Teil 4: Mathematikunterricht in Kooperation mit Informatik,* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Beckmann, Astrid. 1997. *Beweisen im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I.* Hamburg: Lit.

Beckmann, Astrid, und The ScienceMath-Group, Hrsg. 2010. *ScienceMath – Mathematical Literacy and Cross-Curricular Competencies Through Interdisciplinarity, Mathematising and Modelling Science.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Birnbaum, Daniel, und Matthias Ludwig. 2018. «Augmented Reality im Mathematikunterricht – Ein Überblick über derzeitige Einsatzmöglichkeiten». *Beiträge zum Mathematikunterricht* 2018: 2065-66.

Blum, Werner. 2015. «Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?» In *Proceedings of the 12th international congress on mathematical education*, herausgegeben von S. Cho, 73-96. Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3.

Blum, Werner. 1985. «Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion». *Mathematische Semesterberichte* 32 (2): 195-232.

Borromeo Ferri, Rita. 2006. «Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process». *ZDM – The International Journal for Mathematics Education* 38 (2): 86-95. https://doi.org/10.1007/BF02655883.

Bruder, Regina, Lisa Hefendehl-Hebecker, Barbara Schmidt-Thieme, und Hans-Georg Weigand, Hrsg. 2015. *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8.

Buchner, Josef. 2017. «Offener Unterricht mit Augmented Reality». *Erziehung und Unterricht* 7-8 (Sept/Okt): 6.

Carmiginiani, Julie, Borco Furth, Marco Anisetti, Paolo Ceravolo, Ernesto Damiani, und Misa Ivkovic. 2011. «Augmented reality technologies, systems and applications». *Multimedia Tools Appl.* 51: 341-77. https://doi.org/10.1007/s11042-010-0660-6.

Davis, Philip, und Reuben Hersh. 1994. *Erfahrung Mathematik*. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser.

Digel, Susanne, und Jürgen Roth. 2020. «A qualitative-experimental approach to functional thinking with a focus on covariation». *Proceedings of the 10th ERME Topic Conference MEDA 2020/ Linz*: 167-74. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02932218.

Dilling, Frederik. 2022 im Erscheinen. «Physische Arbeitsmittel durch Augmented Reality erweitern – Eine Fallstudie zu dreidimensionalen Koordinatenmodellen». In *Neue Perspektiven auf mathematische Lehr-/Lernprozesse mit digitalen Medien*, herausgegeben von Frederik Dilling, Felicitas Pielsticker, und Ingo Witzke. Wiesbaden: Springer.

Dünser, Andreas. 2005. *Trainierbarkeit der Raumvorstellung mit Augmented Reality.* Thesis, TU Wien. TUW-139958.

Fehling, Dominic. 2019. «Social Augmented Learning: Lehren und Lernen in einer erweiterten Realität». *Online-Zeitschrift für Wissenschaft und Praxis: Medienproduktion* 9. https://web.archive.org/web/20201031133352/https://www5.tu-ilmenau.de/zeitschrift-medienproduktion/index.php/social-augmented-learning-lehren-und-lernen-in-einer-erweiterten-realitaet/.

Fürst, Lia. 2021. *Augmented Reality im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I – Möglichkeiten und Chancen*, Bachelorarbeit. PH Schwäbisch Gmünd.

Galbraith, Peter, und Gloria Stillmann. 2006. «A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process». *ZDM – the international journal on mathematics education* 38 (2): 143-62. https://doi.org/10.1007/BF02655886.

Ganter, Sandra. 2013. «Experimentieren – ein Weg zum funktionalen Denken: Empirische Untersuchung zur Wirkung von Schülerexperimenten». *Didaktik in Forschung und Praxis* 70. Hamburg: Kovac.

Gómez, Pedro, und Cristina Carulla. 2001. «Students' conception of cubic functions». *Proceedings of the 25th conference of PME* 1*:* 339-46.

Graumann, Günter. 1997. «Geometrie im Alltag – Konzeption, Themenübersicht, Praxisberichte». In *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*, herausgegeben von Werner Blum et al. Hildesheim: Franzbecker.

Greefrath, Gilbert. 2011. «Using technologies: New possibilities of teaching and learning modelling – Overview». In *Trends in teaching and learning mathematical modelling. ICTMA 14*, herausgegeben von Gabriele Kaiser, Werner Blum, Rita Borromeo Ferri, und Gloria Stillman, 301-4. Dodrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2.

Greefrath, Gilbert, Corinna Hertleif, und Hans-Stefan Siller. 2018. «Mathematical modelling with digital tools - a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software». *ZDM – the international journal of mathematics education* 50 (1-2): 233-244. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0924-6.

Hellriegel, Jan, und Dino Čubela. 2018. «Das Potenzial von Virtual Reality für den schulischen Unterricht – Eine konstruktive Sicht». *MedienPädagogik* (Occasional Papers): 58-80. https://doi.org/10.21240/mpaed/00/2018.12.11.X.

Höfer, Thilo. 2008. *Das Haus des funktionalen Denkens.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Höfer, Thilo, und Astrid Beckmann. 2009. «Supporting mathematical literacy: examples from a cross-curricular project». *ZDM – The international journal on mathematics education* 41: 223-30. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0117-9.

Hofe vom, Rudolf. 1995. *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Heidelberg: Spektrum.

Hütthaler, Matthias. 2020. «Zur Relevanz von Augmented Reality in der Primarstufe aus Sicht angehender Lehrkräfte – Chancen und Herausforderungen beim Einsatz von Augmented Reality». *PH Niederösterreich. Open Online Journ. F. Res. And Education*. https://journal.ph-noe.ac.at/index.php/resource/article/view/885.

Jablonka, Eva. 2003. «Mathematical Literacy». In *Second International Handbook of Mathematics Education,* herausgegeben von Bishop, A. et al., 75-102. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kaiser, Gabriele, Werner Blum, Rita Borromeo Ferri, und Gilbert Greefrath. 2015. «Anwendungen und Modellieren». In *Handbuch der Mathematikdidaktik*, herausgegeben von Bruder, Regina, Lisa Hefendehl-Hebecker, Barbara Schmidt-Thieme und Hans-Georg Weigand, 357-83. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8.

Kaiser, Gabriele, und Inga Schwarz. 2003. «Mathematische Literalität unter einer sprachlich-kulturellen Perspektive». *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft* 6: 357-77. https://doi.org/10.1007/s11618-003-0040-3.

Kaufmann, Hannes, und Dieter Schmalstieg. 2003. «Mathematics and Geometry Education with Colaborative Augmented Reality». *Computer & Graphics* 27 (3): 339-45. https://doi.org/10.1016/S0097-8493(03)00028-1.

KMK – Kultusministerkonferenz. 2012. *Bildungsstandards*, Fach Mathematik. https://www.kmk.org/themen/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards.html.

Kroker, Bettina. 2018. *Augmented Reality in der Schule*. Ellwangen: Betzold-Blog. https://www.betzold.de/blog/augmented-reality/.

Lengnink, Katja. 2005. «Reflecting mathematics: an approach to achieve mathematical literacy». *ZDM – the international journal on mathematics education* 37 (3): 246-49. https://doi.org/10.1007/s11858-005-0016-2.

Leuders, Timo. 2005. *Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufen I und II.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Leuders, Timo. 2015. «Aufgaben in Forschung und Praxis». In *Handbuch der Mathematikdidaktik*, herausgegeben von Bruder, Regina, Lisa Hefendehl-Hebecker, Barbara Schmidt-Thieme und Hans-Georg Weigand, 435-60. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8.

Levy, Yael, Otman Jaber, Osama Swidan, und Florian Schacht. 2020. «Learning the Function Concept in an Augmented Reality-Rich Environment». *Journal Mathematical Education in the Digital Age (MEDA)*: 239-46.

Lichti, Michaela. 2019. *Funktionales Denken fördern: Experimentieren mit gegenständlichen Materialien oder Computer-Simulationen.* Wiesbaden: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-23621-2.

Lichti, Michaela, und Jürgen Roth. 2018. «How To Foster Functional Thinking in Learning Environments Using Computer-Based Simulations or real Materials». *Journal for STEM Education Research 1*: 148-72. https://doi.org/10.1007/s41979-018--007-1.

Loos, Andreas, und Günter Ziegler. 2015. «Gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik» In *Handbuch der Mathematikdidaktik*, herausgegeben von Bruder, Regina, Lisa Hefendehl-Hebecker, Barbara Schmidt-Thieme und Hans-Georg Weigand, 3-17. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8.

Maaß, Katja. 2004. *Mathematisches Modellieren im Unterricht – Ergebnisse einer empirischen Studie.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Maier, Uwe. 2017. *Lehr-Lernprozesse in der Schule: Studium*. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Manuri, Frederico, und Andrea Sanna. 2016. «A Survey on Applications of Augmented Reality». *Advances in Computer Science: an Int. Journal* 5 (1): 18-27. http://www.acsij.org/acsij/article/view/400.

Michelsen, Claus. 2015. «Mathematical modeling is also physics – Interdisciplinary teaching between mathematics and physics in Danish upper secondary education». *Physics Education* 50 (4): 489-94. https://doi.org/10.1088/0031-9120/50/4/489.

Milgram, Paul, und Fumio Kishino. 1994. «A Taxonomy of Mixed Reality Visual Displays». *IEICE Transactions on Information System* 77 (12): 1321–29. https://web.cs.wpi.edu/~gogo/courses/cs525H_2010f/papers/Milgram_IEICE_1994.pdf.

Neubrand, Michael. 2015. «Bildungstheoretische Grundlagen des Mathematikunterrichts,» In *Handbuch der Mathematikdidaktik*, herausgegeben von Bruder, Regina, Lisa Hefendehl-Hebecker, Barbara Schmidt-Thieme, und Hans-Georg Weigand, 51-76. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8.

Pickert, Günter. 1989. «Warum beweist man im Mathematikunterricht?» *Didaktik der Mathematik* 17 (4): 245-62.

Plath, Jennifer, und Dominik Leiß. 2018. «The impact of linguistic complexity on the solution of mathematical modelling tasks». *ZDM – The international journal on mathematics education 50* (1-2): 159-71. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0897-x.

Radianti, Jaziar, Tim Majchrzak, Jennifer Fromm, und Isabell Wohlgenannt. 2019. «A systematic review of immersive virtual reality applications for higher education: Design elements, lessons learned, and research agenda». *Computers & Education* 147/103778. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2019.103778.

Reit, Xenia. 2020. «Augmented Reality in der analytischen Geometrie: Hat das Potenzial?» *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020:* 1305-8. https://doi.org/10.37626/GA9783959871402.0.

Rolfes, Tobias. 2014. «Begriffsbildungsprozesse bei funktionalen Zusammenhängen: Wie lernförderlich sind externe dynamische Repräsentationen?» *Beiträge zum Mathematikunterricht* 2005: 481-84. https://doi.org/10.17877/DE290R-1007.

Roth, Jürgen. 2014. «Experimentieren mit realen Objekten, Videos und Simulationen. Ein schülerorientierter Zugang zum Funktionsbegriff». *Der Mathematikunterricht* 60 (6): 37-42.

Schendera, Julian. 2021. *Zur Bedeutung von Augmented Reality im Mathematikunterricht des Gymnasiums – Entwicklung und mathematikdidaktische Bewertung von Unterrichtsmaterialien.* Masterarbeit Universität Ulm/PH Schwäbisch Gmünd.

Schultheiß, Katrin. 2020. *Netze von Körpern – Augmented Reality im Mathematikunterricht.* Studentische Arbeit PH Schwäbisch Gmünd. https://moodle.ph-gmuend.de/mod/publication/view.php?id=21605&currentgroup&page=1.

Schultz, Eva. 2019. *Umfrage zur Erfahrung mit Augmented Reality Funktionen in der Schweiz 2018*. https://de.statista.com/statistik/daten/studie/979907/umfrage/umfrage-zur-nutzung-von-augmented-reality-in-der-schweiz-nach-alter/.

Shapera, Daniel. 2016. *Exploring the Use of Augmented Reality to Support Cognitive Modeling in Art Education.* Dissertation. Arizona: State University. https://repository.asu.edu/attachments/178500/content/Shapera_asu_0010E_16558.pdf.

Sinclair, Nathalie, und Christian Berneche. 2011. «The Role of the Aesthetic in Mathematical Problem Solving». In *Interdisciplinarity for the Twenty-First Century. Proceedings of the Third International Symposium on Mathematics and its Connections to the Arts and Sciences, Moncton 2009*, herausgegeben von Barath Sriraman, 49-65. Montana: The Montana Mathematics Enthusiast, Montana University.

Swidan, Osama, Florian Schacht, Cristina Sabena, Michael Fried, und Ferdinando Arzarello. 2020. «Engaging Students in Covariational Reasoning within an Augmented Reality Environment». In *Augmented Reality in Educational Settings,* herausgegeben von Prodomou, Theodosia, 147-67. Leiden: Koninklijke Brill NV. https://doi.org/10.1163/9789004408845_007.

Trappmair, Andreas, und Markus Hohenwarter. 2020. «Driving augmented reality: GeoGebra's new AR features in teaching mathematics». In *Proceedings of the 14th International Conference on Technology in Mathematics*, 136-43. https://doi.org/10.17185/duepublico/70752.

Vinner, Shlomo, und Tommy Dreyfus. 1989. «Images and definitions for the concept of function». *Journal Research Math. Education* 20 (4): 356-66.

Wagenschein, Martin. 1982. *Verstehen lehren*. Basel: Beltz.

Weigand, Hans-Georg. 2015. «Begriffsbildung». In *Handbuch der Mathematikdidaktik*, herausgegeben von Bruder, Regina, Lisa Hefendehl-Hebecker, Barbara Schmidt-Thieme, und Hans-Georg Weigand, 255-78. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8.

Werth, Gerda. 2014. *Ziehen und Beweisen mit DGS: Welche Beweiskraft haben für Studierende die Erkenntnisse, die sie im Zugmodus gewinnen?* Dissertation, Paderborn: Universität Paderborn. https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:2-14966.

Wess, Raphael, Hans-Stefan Stiller, Heiner Klück, und Gilbert Greefrath. 2021. «Mathematical Modelling». *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*: 3-20. https://doi.org/10.1007/978-3-030-78071-5_1.

Winter, Heinrich. 1996. «Mathematikunterricht und Allgemeinbildung». *Mitteilungen der DMV* 2: 35-41.

Wolfinger, Julia, Janis Marian Ahrer, Alicia Hofstätter, und Markus Hohenwarter. 2020. «Möglichkeiten von Augmented reality in der GeoGebra 3D Rechner App». *Beiträge zum Mathematikunterricht,* 1049-52. https://doi.org/10.37626/GA9783959871402.0

Zell, Simon. 2010. *Fächerübergreifende Elemente im Mathematikunterricht zur Förderung von mathematical literacy*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Beispiele für AR-Apps

Die nachfolgenden Apps bzw. AR-Plattformen für AR-Projekte wurden alle zuletzt am 10.01.2022 aufgerufen.

- Areeka: https://areeka.net bzw. https://studio.areeka.net,
- Blippar: https://www.blippar.com,
- Augment: https://www.augment.com,
- Arloopa: https://arloopa.com bzw. https://studio.arloopa.com
- zusätzlichen geometrischen Konstruktionsmöglichkeiten:
- GeoGebra 3D Rechner: www.geogebra.org
- mit Messfunktionen:
- AR Ruler: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.grymala.aruler.